

## Praškaste materije u produktima sagorevanja (drugi deo)

Ponašanje čestice u aerosolu u velikoj meri zavisi od njene veličine. Različiti izvori emisije proizvode čestice čije se dimenzije kreću od gotovo molekulskih pa sve do mikrometarskih veličina. Transport i taloženje usled gravitacije, difuzije, inercije i elektrostatičkih mehanizama zavise od veličine čestica. Efekti kao što su rasipanje svetlosti i uticaj na zdravlje takođe variraju u zavisnosti od veličine čestica. Izbor opreme i materijala za smanjenje koncentracije čestica u vazduhu i drugim gasovima delimično zavisi i od veličine čestica od interesa. Oprema koja je pogodna za uzorkovanje različitih aerosola mora se birati uzimajući u obzir veličinu čestica. Čak i korisne primene aerosola (npr. u izradi materijala ili kod terapijskih aerosola) mogu biti više ili manje efikasne u zavisnosti od veličine čestica.

### Statističke raspodele veličine čestica

Određivanje raspodele veličine čestica zahteva izolovanje uzorka, razdvajanje čestica na osnovu njihove veličine i kvantifikaciju (npr. brojanje ili merenje mase) čestica u svakom intervalu veličina. U primeni su četiri najčešće metode merenja raspodele veličina čestica:

- čestice se uzorkuju, zatim osvetljavaju i detektuju optičkim brojačem čestica, pri čemu se beleži broj čestica u svakom od mnogobrojnih intervala optički ekvivalentnog prečnika;
- čestice se uzorkuju, zatim talože filtracijom i potom određuju i broje pomoću tehnika kao što su optička ili elektronska mikroskopija;
- čestice se uzorkuju kaskadnim impaktorom a zatim se meri ukupna masa čestica u svakom od mnogobrojnih intervala aerodinamički ekvivalentnog prečnika;
- čestice se ubrzavaju kroz zonu detekcije i njihova veličina se određuje na osnovu ponašanja u toj zoni, na primer u uređajima zasnovanim na vremenu prolaska (time-of-flight).

U prvom delu, čitaoci su mogli da se upoznaju sa histogramskim prikazom veličine čestica. Kako se širina klasa u histogramu približava nuli, histogram prelazi u glatku, kontinualnu krivu. Ova kriva je definisana funkcijom  $f(d_p)$ . Za beskonačno veliki broj čestica, udeo čestica u bilo kom malom interval između  $d_p$  i  $d_p+dd_p$  jednak je  $f(d_p) \cdot dd_p$  (o ovome je bilo reči u prethodnom tekstu). Za beskonačno veliki broj merenja, površina ispod ovakve krive između dva prečnika  $a$  i  $b$  predstavlja udeo čestica čiji su prečnici unutra tog intervala

$f_{ab} = \int_a^b f(d_p) \cdot dd_p$ . Drugim rečima,  $f(d_p) \cdot dd_p$  predstavlja

verovatnoću da će jedna čestica imati prečnik između  $d_p$  i  $d_p+dd_p$ . Funkcija  $f(d_p)$  naziva se funkcija gustine verovatnoće. Isto tako,

određeni integral  $\int_a^b f(d_p) \cdot dd_p$  daje verovatnoću da jedno merenje

ima vrednost između  $a$  i  $b$ . Korišćenjem funkcije gustine verovatnoće može se izračunati očekivana srednja vrednost  $\bar{d}_p$  kao i standardna

devijacija  $\sigma$

$$\bar{d}_p = \int_0^{\infty} d_p \cdot f(d_p) \cdot dd_p \quad (1)$$

$$\sigma = \sqrt{\int_0^{\infty} (d_p - \bar{d}_p)^2 \cdot f(d_p) \cdot dd_p} \quad (2)$$

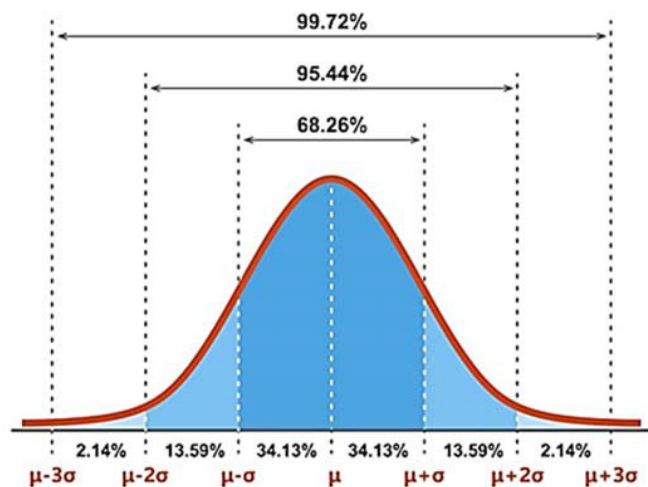
Tekst u prethodnom broju časopisa bio je usmeren na osobine raspodela uopšteno, bez razmatranja neke posebne vrste raspodele. U ovom delu opisać se karakteristike najčešće primenjivanih raspodela u analizi veličina aerosolnih čestica – normalna (Gausova) i lognormalna. Kao što će biti objašnjeno u nastavku teksta, normalna raspodela, iako široko korišćena u drugim oblastima, nije pogodna za većinu raspodela veličina aerosolnih čestica.

Pored tri gore navedene raspodele, postoje i druge raspodele kao što su Rosin–Rammler, Nukiyama-Tanasawa, stepena, eksponencijalna i Khrigian-Mazin raspodela. Ove raspodele primenjuju se u posebnim situacijama i imaju ograničenu upotrebu u nauci o aerosolima. Sve one (kao i lognormalna raspodela) izabrane su empirijski, kako bi odgovarale širokom rasponu i asimetričnom obliku koji su karakteristični za većinu raspodela veličina čestica.

### Normalna (Gausova) raspodela

Simetrična normalna (ili Gausova) raspodela idealna je za opisivanje mernih nesigurnosti koje su raspoređene simetrično oko centralne vrednosti, pri čemu nesigurnosti mogu imati i pozitivne i negativne vrednosti. Ako se prava vrednost izmerene veličine  $x$  označi sa  $\mu$ , a merenja veličine  $x$  podložna mnogim malim slučajnim greškama, ali zanemarljivim sistematskim greškama, tada će raspodela merenja biti simetrična kriva u obliku zvona, čiji je centar na pravoj vrednosti  $\mu$  (slika 1). Matematička funkcija koja opisuje ovu krivu naziva se normalna ili Gausova raspodela. Dva parametra

opisuju normalnu raspodelu — njena srednja vrednost ( $\mu$ ) i standardna devijacija ( $\sigma$ ).



Slika 1: Normalna ili Gausova raspodela

Normalna raspodela se retko koristi za opisivanje raspodela veličina aerosolnih čestica zato što većina aerosola pokazuje asimetričnu raspodelu (dug „rep“ ka većim veličinama čestica). Normalna raspodela je, naravno, simetrična. Normalna raspodela se u nauci o aerosolima sreće u slučajevima kada su čestice gotovo iste veličine i gotovo monodisperzne, kao što su polistiren-lateks sfere koje se koriste za kalibraciju opreme za merenje čestica, na određene vrste polena i spora. Funkcija učestalosti po broju data je izrazom:

$$df = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(d_p - \bar{d}_p)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \cdot dd_p \quad (3)$$

gde je  $\bar{d}_p$  aritmetički srednji prečnik a  $\sigma$  standardna devijacija

definisana izrazom

$$\sigma = \left( \frac{\sum_{i=1}^N n_i \cdot (d_p - \bar{d}_p)^2}{N - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

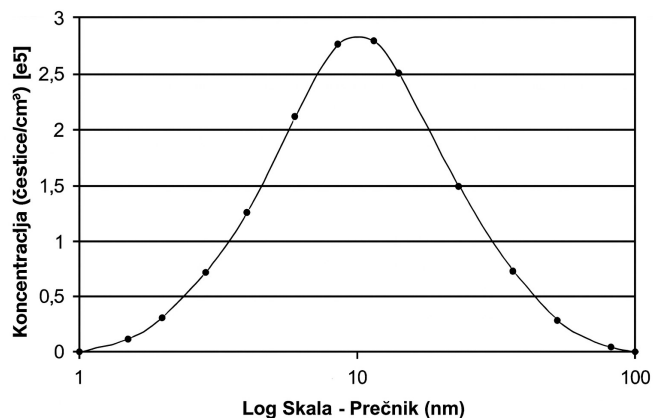
Drugi problem pri primeni normalne raspodele na bilo koju veličinu koja varira u širokom opsegu, kao što je veličina aerosolnih čestica, jeste taj što bi tako široka normalna raspodela zahtevala da određeni deo čestica ima negativnu veličinu, što je fizički nemoguće. Ovaj problem, u kombinaciji sa često uočenim asimetričnim oblikom raspodele, doveo je do primene logaritamске transformacije podataka o veličini, kako bi se dobila lognormalna raspodela.

## Lognormalna raspodela

U nauci i tehnologiji aerosola lognormalne raspodele veličina čestica mnogo su češće od normalnih raspodela. Raspodele veličina čestica često imaju standardne devijacije koje su velike u poređenju sa

njihovim srednjim veličinama, pa su normalne raspodele neprikladne za njihov opis, jer takve raspodele mogu poprimiti negativne vrednosti veličine čestica – što je, naravno, fizički nemoguće. Takve raspodele, koje se matematički često opisuju lognormalnom raspodelom, po svojoj prirodi su nenegativne, tj. veličine čestica ne mogu biti negativne.

Kada se umesto same veličine čestica na horizontalnu osu ucrtta logaritam veličine čestica, funkcija učestalosti poprima simetričan oblik normalne raspodele (slika 2).



Slika 2: Primer lognormalne raspodele [3]

Lognormalna raspodela je najkorisnija u situacijama kada posmatrana veličina može imati samo pozitivne vrednosti i obuhvata širok opseg – odnosno kada je odnos najveće i najmanje vrednosti veći od 10. Kada je taj opseg mali, lognormalna raspodela se približava normalnoj raspodeli.

Lognormalna raspodela se široko koristi za raspodele veličina aerosolnih čestica zato što se dobro uklapa u realno izmerene raspodele i zato što je njen matematički oblik pogodan za rad sa raspodelama momenata i srednjim vrednostima momenata opisanim u prethodnom tekstu.

Za matematički opis lognormalne raspodele se može koristiti kako dekadni logaritam ( $\log d_g$ ) tako i prirodni logaritam ( $\ln d_g$ ).

Kao što se normalna raspodela može opisati aritmetičkom sredinom i standardnom devijacijom, tako se lognormalna raspodela opisuje geometrijskom sredinom ( $d_g$ ) i geometrijskom standardnom devijacijom ( $\sigma_g$ ):

$$\log d_g = \frac{\sum_{i=1}^N n_i \cdot \log d_i}{\sum_{i=1}^N n_i} \quad (5)$$

$$\log \sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N n_i \cdot (\log d_i - \log d_g)^2}{\sum_{i=1}^N n_i - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N n_i \cdot \left(\log \frac{d_i}{d_g}\right)^2}{\sum_{i=1}^N n_i - 1}} \quad (6)$$

Podaci dati u tabeli 1 će se iskoristiti za primer proračuna geometrijske sredine i geometrijske standardne devijacije

$$\log d_g = \frac{\sum_{i=1}^N n_i \cdot \log d_i}{\sum_{i=1}^N n_i} = \frac{-30,67}{832} = -0,036$$

$$d_g = 10^{-0,036} = 0,92 \mu\text{m}$$

$$\log \sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N n_i \cdot (\log d_i - \log d_g)^2}{\sum_{i=1}^N n_i - 1}} = \sqrt{\frac{107,04}{831}} = 0,36$$

$$\sigma_g = 10^{0,36} = 2,29 \text{ (geometrijska standardna devijacija nema}$$

dimenziju pri čemu su njene vrednosti veće ili jednake 1).

**Tabela 1.** Proračun geometrijske sredine i geometrijske standardne devijacije [2]

Broj čestica, $n_i$	Srednja vrednost veličine intervala, $d_i, \mu\text{m}$	$\log d_i$	$n_i \cdot \log d_i$	$n_i \cdot (\log d_i - \log d_g)^2$
120	0,3	-0,52	-62,7	28,45
380	0,65	-0,19	-71,1	8,67
146	1,1	0,04	6,04	0,87
96	2,05	0,31	29,93	11,61
53	4,15	0,62	32,76	22,67
22	7,25	0,86	18,93	17,68
15	10,75	1,03	15,47	17,09
$\Sigma n_i = 832$	-	-	$\Sigma n_i \cdot \log d_i = -30,67$	$\Sigma n_i \cdot (\log d_i - \log d_g)^2 = 107,04$

Prethodni proračun je rađen korišćenjem dekadnog logaritma. Čitaocima se preporučuje da urade proračun korišćenjem prirodnog logaritma. Dobijeni rezultati treba da budu isti.

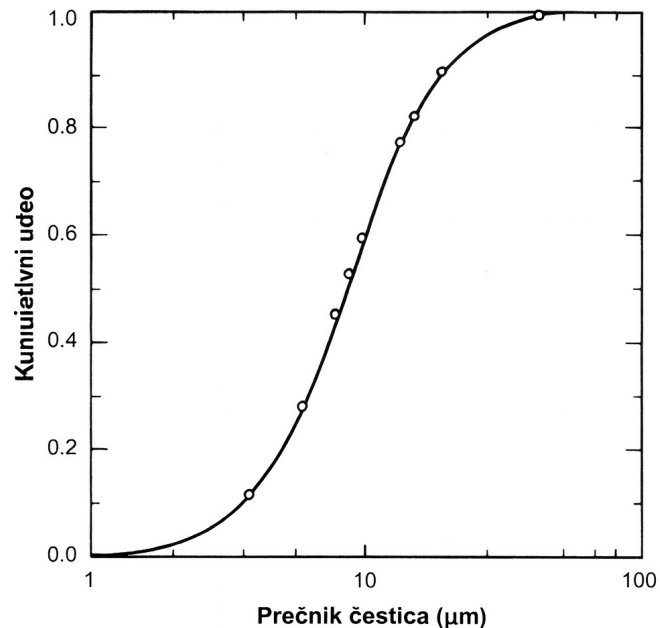
Za brojčanu raspodelu, geometrijska sredina  $d_g$  uobičajeno se zamenjuje medijanom brojčane raspodele, odnosno CMD (*count median diameter*). Geometrijska sredina je aritmetička sredina raspodele  $\ln d_g$ , koja predstavlja simetričnu normalnu raspodelu (slika 2), pa su zato njena srednja vrednost i medijana jednake. Medijana raspodele  $\ln d_p$  ujedno je i medijana raspodele  $d_p$ , jer se red vrednosti ne menja prilikom pretvaranja u logaritme. Dakle, za lognormalnu brojčanu raspodelu važi  $d_g = CMD$ . Funkcija učestalosti može se izraziti kao

$$df = \frac{1}{\ln \sigma_g \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln d_p - \ln CMD)^2}{2 \cdot (\ln \sigma_g)^2}\right) \cdot d \ln d_p \quad (7)$$

koja daje udeo čestica čiji se logaritmi prečnika nalaze između  $\ln d_p$  i  $d \ln d_p$ . Međutim, pogodnije je izraziti funkciju učestalosti u zavisnosti od prečnika čestica  $d_p$ , a ne u zavisnosti od  $\ln d_p$ . Sređivanjem izraza (7) u obliku zasnovanom na  $d_p$ , i koristeći činjenicu da je  $d \ln d_p = dd_p / d_p$  dobija se

$$df = \frac{1}{d_p \cdot \ln \sigma_g \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln d_p - \ln CMD)^2}{2 \cdot (\ln \sigma_g)^2}\right) \cdot dd_p \quad (8)$$

Kumulativna raspodela za lognormalnu raspodelu dobija se na način opisan u prethodnom tekstu (slika 5). Kumulativni dijagram prikazan na slici 3. isti je kao dijagram na slici 5. datoj u prethodnom tekstu, ali je prečnik prikazan na logaritamskoj skali. Na slikam se uočava da medijana ima iste vrednosti na obe slike.



**Slika 3:** Kumulativna kriva raspodele veličine čestica (prečnik čestica je prikazan na logaritamskoj osi)

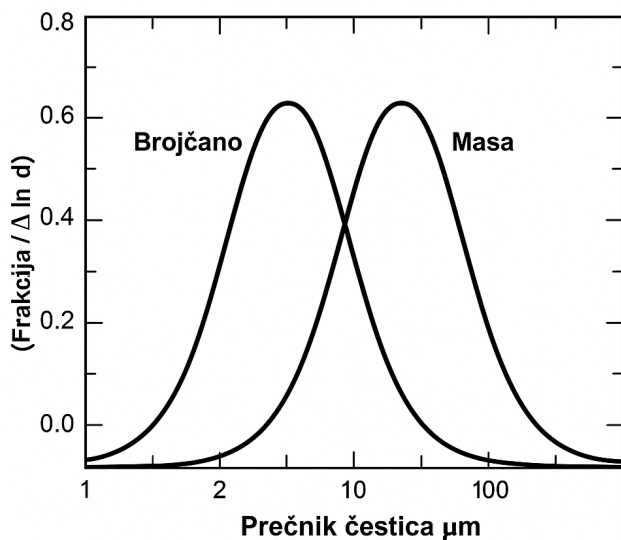
Za normalnu raspodelu, 95% čestica nalazi se u opsegu definisanom sa  $\bar{d} \pm 2 \cdot \sigma$ . Za lognormalnu brojčanu raspodelu, raspodela je normalna u odnosu na  $\ln d$ , tako da se 95% čestica nalazi u opsegu definisanom sa

$$\exp(\ln CMD \pm 2 \cdot \sigma_g) \quad (9)$$

Ovaj opseg je asimetričan i ima vrednosti od  $CMD/\sigma_g^2$  do  $CMD \cdot \sigma_g^2$ . Za  $\sigma_g = 2$ , 95% čestica ima veličine između jedne četvrtine i četiri puta vrednosti CMD.

Sve momente raspodele bilo koje lognormalne raspodele takođe će biti lognormalne i imaće istu geometrijsku standardnu devijaciju ( $\sigma_g$ ). To znači da će imati isti oblik kada se prikažu na logaritamskoj skali. Lognormalna raspodela je jedina raspodela koja ima ovu karakteristiku.

Na slici 4. prikazane su raspodele po broju i po masi na istoj logaritamskoj skali prečnika. Za raspodelu mase geometrijski srednji prečnik zamenjuje se sa MMD, analogno kao što je to urađeno za brojčanu raspodelu. Raspodela mase ima isti oblik kao i brojčana raspodela, ali je pomenjena duž horizontalne ose za konstantan iznos jednak MMD/CMD. Odnos MMD/CMD može se izračunati znajući samo  $\sigma_g$ .



Slika 4: Raspede po broju i masi prikazane na logaritamskoj skali

### Ostale raspodele veličine čestica

Kao što je već navedeno, lognormalna raspodela je najčešće korišćena raspodela za opisivanje veličine čestica u aerosolu. Međutim, nekoliko od ne toliko često korišćenih raspodela pokazalo se korisnim za određene tipove aerosola.

#### Rosin-Rammler raspodela

Rosin–Rammler raspodela (1933), prvobitno je razvijena za određivanje raspodele čestica usitnjenog uglja, primenljiva je na grubo dispergovanu prašinu i sprejeve. Posebno je korisna za raspodele veličina čestica čija je raspodela izraženije asimetrična od lognormalne raspodele, kao i za granulometrijsku analizu. Udeo mase između  $d_p$  i  $d_p + dd_p$  dat je izrazom

$$df_m = a \cdot b \cdot d_p^{b-1} \cdot \exp(-a \cdot d_p^b) \cdot dd_p \quad (10)$$

gde  $a$  zavisi od veličine čestica čestica, a  $b$  od svojstava materijala.

Ova raspodela može da se koristi kada su granične tačke za najmanji i najveći prečnik jasno definisane.

#### Nukiyama-Tanasawa raspodela

Nukiyama–Tanasawa raspodela (1939) koristi se za sprejeve koji imaju izuzetno širok raspon veličina čestica. Broj čestica čiji se prečnici nalaze između  $d_p$  i  $d_p + dd_p$  dat je izrazom

$$df = a \cdot d_p^2 \cdot \exp\left(-\frac{b}{d_p^3}\right) \cdot dd_p \quad (11)$$

gde su  $a$  i  $b$  empirijske konstante koje zavise od konstante mlaznike kojom se vrši uzorkovanje.

#### Stepena raspodela

Stepena raspodela primenjuje se je na raspodele veličina čestica atmosferskih aerosola. Broj čestica čije se veličine nalaze između  $d_p$  i  $d_p + dd_p$  dat je izrazom

$$df = a \cdot d_p^{-b} \cdot dd_p \quad (12)$$

#### Eksponencijalna raspodela

Eksponencijalna raspodela se najčešće primenjuje za praškaste materijale. Broj čestica čije se veličine nalaze između  $d_p$  i  $d_p + dd_p$  dat je izrazom

$$df = a \cdot \exp(-b \cdot d_p) \cdot dd_p \quad (13)$$

gde odnos  $a/b$  predstavlja ukupan broj čestica.

#### Khrgian-Mazin raspodela

Raspodele veličina kapljica u oblacima opisane su Khrgian–Mazin raspodelom [10]. Broj kapljica po jedinici zapremine, čije se veličine nalaze između  $d_p$  i  $d_p + dd_p$  dat je izrazom

$$df = a \cdot d_p^2 \exp(-b \cdot d_p) \cdot dd_p \quad (14)$$

U izrazu (14) brojčana koncentracija kapljica iznosi  $2 \cdot a/b^3$ , dok je srednji prečnik  $3/b$ .

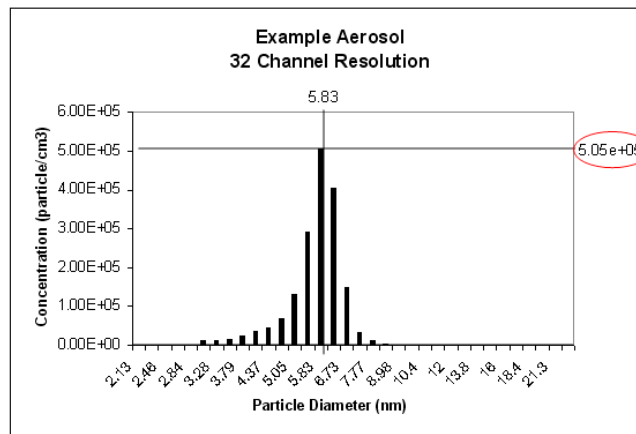
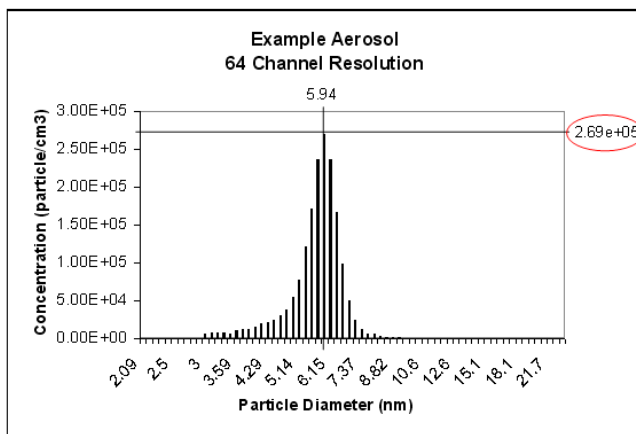
### Raspodele koncentracija čestica

Većina tekstova o aerosolima bavi se određivanjem veličine čestica i raspodelama veličina, jer su to veoma važne teme. Koncentracije aerosola u prirodi i u mnogim zatvorenim prostorima, uključujući radna mesta, retko su ujednačene i konstantne. Umesto toga, najčešće se sreću raspodele vrednosti koncentracije. Informacije o raspodeli koncentracije često se mogu opisati istim metodama koje se koriste za raspodele veličina čestica. Na primer, aritmetička sredina uzorka i standardna devijacija uzorka dobijaju se za broj čestica na isti način kao i za njihovu veličinu.

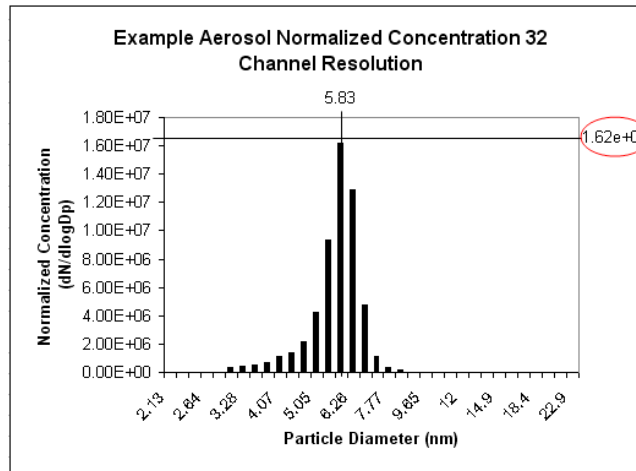
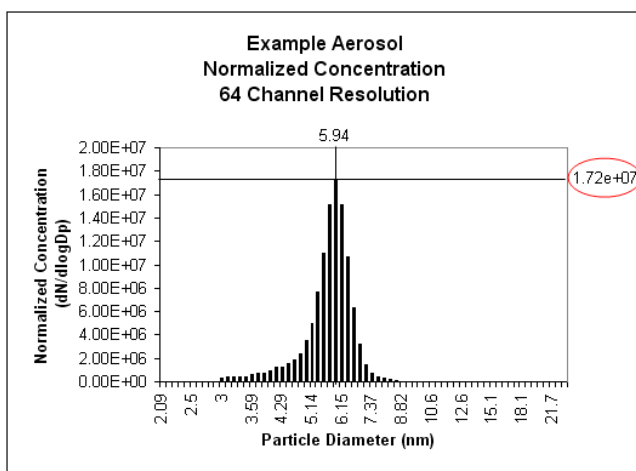
Kao što je već rečeno, normalne raspodele koncentracija nisu toliko uobičajene za aerosole. Raspodele aerosola su pretežno lognormalnog karaktera, pa se podaci obično prikazuju na lognormalnoj horizontalnoj osi. Nakon merenja, podaci o česticama prikazuju se kao funkcija koncentracije ( $dN$ ) za svaku klasu veličina čestica.

Kod uređaja za određivanje veličina aerosolnih čestica, broj klasa veličine čestica je konačan. Ovaj jednostavan pristup, koncentracija naspram logaritamskog prečnika čestica, funkcioniše dobro samo ako se koristi jedan tip instrumenta ili ako se porede uređaji sa identičnom rezolucijom. Međutim, ako se pokuša da se uporede raspodele čestica istog aerosola dobijene uređajima različitih rezolucija, dijagrami koncentracije u odnosu na prečnik čestica mogu biti zbunjujući.

Na slici 5. prikazana su dva dijagrama dobijena instrumentom



Slika 5: Dijagram koncentracije aerosola u zavisnosti od rezolucije uređaja za merenje [3]



Slika 6: Dijagram koncentracije aerosola definisan preko normalizovane koncentracije [3]

Scanning Mobility Particle Sizer (SMPS) spektrometrom. Na levom dijagramu raspodela je prikazana korišćenjem 64 kanala rezolucije, dok je na desnom grafiku prikazano potpuno isti skup podataka, ali sa 32 kanala rezolucije. Na prvi pogled, izgleda kao da aerosol prikazan na desnom dijagramu ima približno duplo veću koncentraciju. Međutim, to je samo vizuelna iluzija izazvana razlikom u rezoluciji. Koncentracija na desnoj strani deluje dvostruko veća zato što je širina klase veličine čestica dvostruko veća nego na levom dijagramu.

Kako bi se izbegao ovaj problem (slika 6), grafički prikaz koncentracija aerosola se predstavlja normalizovanom koncentracijom  $dN/d \log D_p$ , gde je  $dN$  (ili  $\Delta N$ ) broj čestica u opsegu  $d \log D_p$  (ili  $\Delta \log D_p$ ).

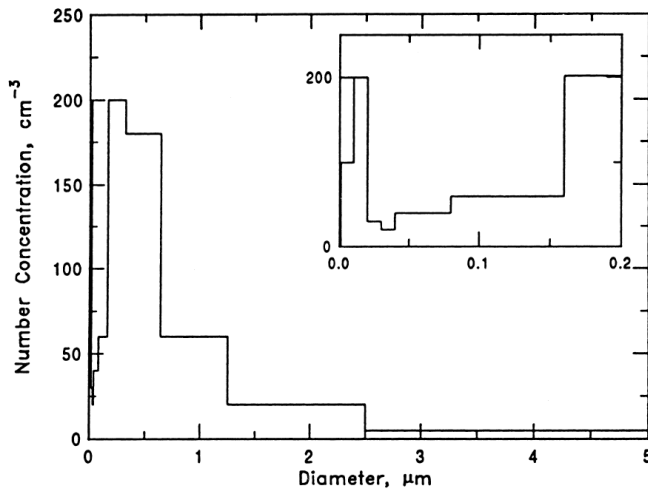
Radi lakšeg shvatanja poslužićemo se jednim primerom. Neka su u tabeli 2. dati podaci o raspodeli čestica po veličini.

Na osnovu tabele 2. moguće je nacrtati histogram raspodele čestica gde će na horizontalnoj osi biti prečnik čestica a na vertikalnoj osi koncentracija (predstavlja broj čestica po jedinici zapremine vazduha), što je dato na slici 7.

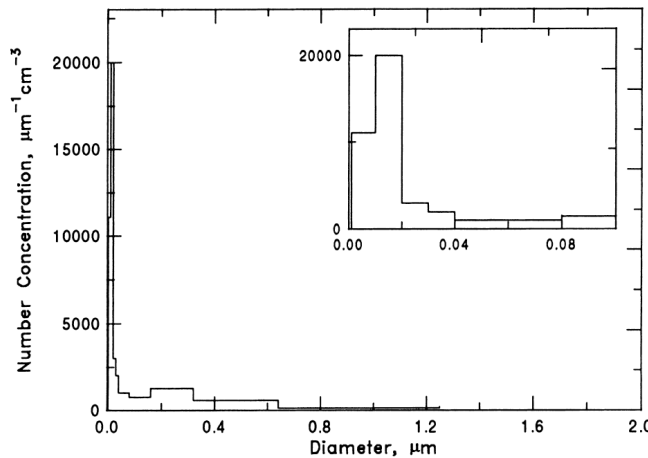
Tabela 2. Proračun geometrijske sredine i geometrijske standardne devijacije [2]

Frakcija, $\mu\text{m}$	Koncentracija, $\text{cm}^{-3}$	Kumulativno, $\text{cm}^{-3}$	Koncentracija, $\mu\text{m}^{-1}\cdot\text{cm}^{-3}$
0,001 ÷ 0,01	100	100	11111
0,01 ÷ 0,02	200	300	20000
0,02 ÷ 0,03	30	330	3000
0,03 ÷ 0,04	20	350	2000
0,04 ÷ 0,08	40	390	1000
0,08 ÷ 0,16	60	450	750
0,16 ÷ 0,32	200	650	1250
0,32 ÷ 0,64	180	830	563
0,64 ÷ 1,25	60	890	98
1,25 ÷ 2,50	20	910	16
2,50 ÷ 5,00	5	915	2
5,00 ÷ 10,00	1	916	0,2

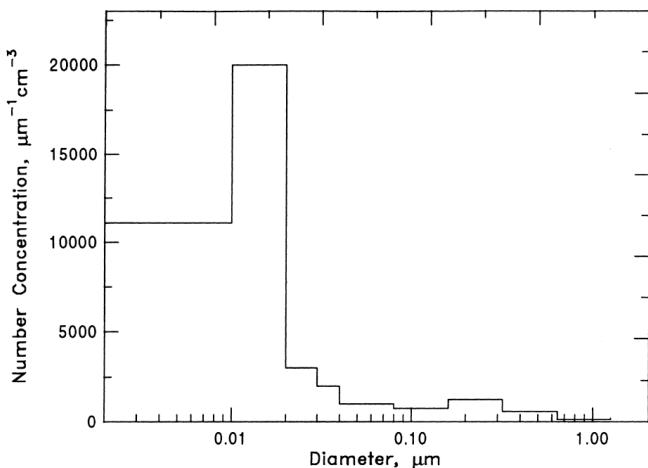
Korišćenje opsega veličina različite širine otežava tumačenje apsolutnih koncentracija. Na primer, može se zahtevati da se odredi opseg veličina u kome se nalazi najveći broj čestica. Gledano u tabeli 2, vidi se npr. da u opsegu  $0,01 \div 0,02 \mu\text{m}$  ima 200 čestica/ $\text{cm}^3$ , a takođe isti taj broj čestica se nalazi i u opsegu  $0,16 \div 0,32 \mu\text{m}$ .



Slika 7: Histogram brojčane koncentracije čestica [11]



Slika 8: Dijagram koncentracije čestica (normalizovani dijagram) [11]



Slika 9: Dijagram koncentracije čestica na kome je horizontalna osa logaritamska [11]

Međutim, poređenje koncentracije u opsegu širine  $0,01 \mu\text{m}$  sa onom u opsegu širine  $0,16 \mu\text{m}$  favorizuje ovaj drugi. Da bi se izbegle takve pristrasnosti, raspodela se često normalizuje tako što

se koncentracija podeli odgovarajućom širinom opsega. Rezultat je koncentracija izražena u  $\mu\text{m}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3}$  (slika 8).

Kao što se vidi na slici 8, grafička interpretacija raspodele sada ima promenjen oblik ali je sada površina ispod krive proporcionalna koncentraciji. Slika 8. takođe govori da je približno polovina čestica manja od  $0,1 \mu\text{m}$ . Grafički prikaz na slici 7. može obmanuti, jer sugeriše da su gotovo sve čestice veće od  $0,1 \mu\text{m}$ . Ako se, međutim, za prečnik koristi logaritamska skala (slika 9), tada se vide i oblasti malih i velikih čestica, ali sada pogrešno izgleda kao da raspodela gotovo u potpunosti sadrži čestice manje od  $0,1 \mu\text{m}$ .

### Raspodela po broju $n_N(D_p)$

Kako je prethodno navedeno, vrednosti raspodele aerosola  $n_i$  za interval veličine  $i$  izražena je kao odnos apsolutne koncentracije aerosola  $N_i$  u tom intervalu i opsega veličine čestice  $\Delta D_p$ . Koncentracija aerosola se može izračunati korišćenjem izraza

$$N_i = n_i \cdot \Delta D_p \quad (15)$$

Međutim, korišćenje proizvoljnih intervala  $\Delta D_p$  otežava poređenje raspodela veličina aerosola. Da bi se izbegle ove komplikacije i očuvale sve informacije o raspodeli aerosola, može se koristiti sve veći broj sve užih opsega veličina, što konačno dovodi do  $\Delta D_p \rightarrow 0$ . U toj granici  $\Delta D_p$  postaje beskonačno mali i jednak je  $dD_p$ . Sada se može definisati funkcija raspodele veličina aerosola  $n_N(D_p)$  na sledeći način

$$n_N(D_p) dD_p = \text{broj čestica po cm}^3 \text{ vazduha koje imaju dimenzije u opsegu } D_p \text{ do } D_p + dD_p. \quad (16)$$

Jedinica za funkciju raspodele  $n_N(D_p)$  je  $\mu\text{m}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3}$  a ukupan broj čestica po  $\text{cm}^3$  ( $N$ ) iznosi

$$N = \int_0^{\infty} n_N(D_p) dD_p \quad (17)$$

Kumulativna funkcija raspodele  $N(D_p)$  definiše se kao

$$N(D_p) = \text{broj čestica po cm}^3 \text{ čiji je prečnik manji od } D_p. \quad (18)$$

Za razliku od  $n_N(D_p)$ , funkcija  $N(D_p)$  predstavlja stvarnu koncentraciju čestica u opsegu veličina od 0 do  $D_p$  i ima jedinicu  $\text{cm}^{-3}$ . Veza između ove dve veličine ima oblik

$$N(D_p) = \int_0^{D_p} n_N(D_p^*) dD_p^* \quad (19)$$

Diferenciranjem izraza (19) funkcija raspodele se može napisati kao

$$n_N(D_p) = \frac{dN}{dD_p} \quad (20)$$

### Raspodele zasnovane na $\ln D_p$ i $\log D_p$

Izražavanje aerosolnih raspodela kao funkcija  $\ln D_p$  ili  $\log D_p$ , umesto  $D_p$ , često je najpogodniji način prikazivanja raspodele veličina aerosola. Formalno, ne možemo uzeti logaritam veličine koja ima dimenziju. Tj, kada se piše  $\ln D_p$ , zapravo se misli na  $\ln(D_p/1)$  pri čemu je „referentni“ prečnik čestice 1  $\mu\text{m}$ . Sada se može definisati funkcija brojčane raspodele kao

$$n_N^e(\ln D_p) d \ln D_p = \text{broj čestica po cm}^3 \text{ vazduha koje imaju dimenzije u opsegu } \ln D_p \text{ do } \ln D_p + d \ln D_p \quad (21)$$

Jedinica za  $n_N^e(\ln D_p)$  je  $\text{cm}^{-3}$  jer je  $D_p$  bezdimenziono.

Ukupan broj čestica sada iznosi

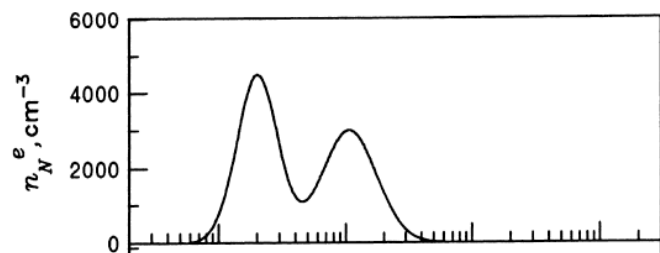
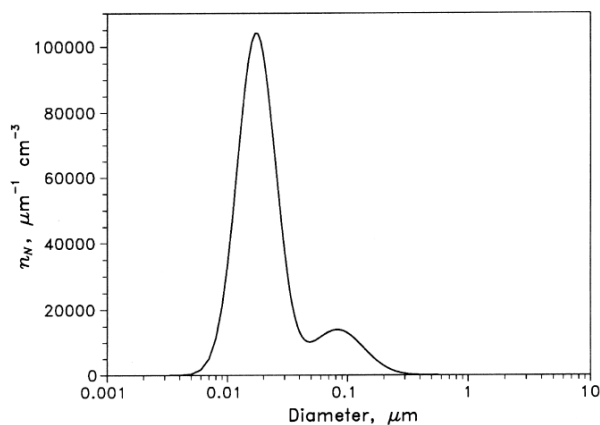
$$N_t = \int_{-\infty}^{+\infty} n_N^e(\ln D_p) d \ln D_p, \text{ cm}^{-3}. \quad (22)$$

Sve ove raspodele se mogu izraziti i u funkciji dekadnog logaritma ( $\log D_p$ ) i označava se kao  $n_N^e(\log D_p)$ . Slično izrazu (20) može se pisati

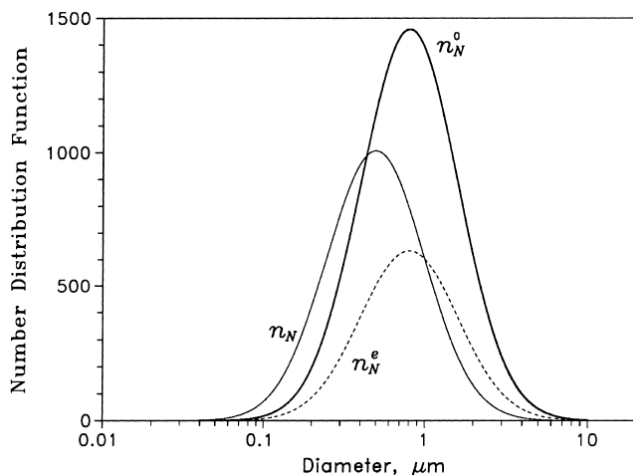
$$n_N^e(\ln D_p) = \frac{dN}{d \ln D_p} \quad (23)$$

$$n_N^e(\log D_p) = \frac{dN}{d \log D_p} \quad (24)$$

Na slici 10. i 11. prikazane su raspodele  $n_N(D_p)$ ,  $n_N^e(\ln D_p)$  i  $n_N^e(\log D_p)$ .



Slika 10: Uporedni prikaz raspodela  $n_N(D_p)$  i  $n_N^e(\ln D_p)$  [11]



Slika 11: Uporedni prikaz raspodela  $n_N(D_p)$ ,  $n_N^e(\ln D_p)$  i  $n_N^e(\log D_p)$  za aerosol koji ima lognormalnu raspodelu ( $\bar{D}_{pg} = 0,8 \mu\text{m}$  i  $\sigma_g = 1,5$ ). Bez obzira što sve tri funkcije opisuju isti aerosol, one se međusobno razlikuju jer imaju različitu nezavisnu promenljivu ( $D_p$ ,  $\ln D_p$ ,  $\log D_p$ ). Broj čestica predstavlja površinu ispod krive  $n_N^e(\log D_p)$  [11]

### Lognormalna funkcija raspodele

Za aerosol se može reći da ima lognormalnu raspodelu ako važi

$$n_N(D_p) = \frac{dN}{dD_p} = \frac{N_t}{D_p \cdot \ln \sigma_g \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln D_p - \ln \bar{D}_{pg})^2}{2 \cdot \ln^2 \sigma_g}\right) \quad (25)$$

$$n_N^e(\ln D_p) = \frac{dN}{d \ln D_p} = \frac{N_t}{\ln \sigma_g \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln D_p - \ln \bar{D}_{pg})^2}{2 \cdot \ln^2 \sigma_g}\right) \quad (26)$$

Ako je raspodela aerosola lognormalna, onda prema (25) važi

$$N(D_p) = \frac{N_t}{\ln \sigma_g \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{D_p} \frac{1}{D_p^*} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln D_p^* - \ln \bar{D}_{pg})^2}{2 \cdot \ln^2 \sigma_g}\right) \cdot dD_p^* \quad (27)$$

Da bi se izračunao integral uvodi se  $\eta = (\ln D_p^* - \ln \bar{D}_{pg}) / \sqrt{2} \cdot \ln \sigma_g$  pa se dobija

$$N(D_p) = \frac{N_t}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{(\ln D_p - \ln \bar{D}_{pg}) / \sqrt{2} \cdot \ln \sigma_g} e^{-\eta^2} d\eta \quad (28)$$

Ako se error funkcija definiše kao

$$\text{erf } z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-\eta^2} d\eta \quad (29)$$

onda važi  $\text{erf}(0) = 0$  i  $\text{erf}(\infty) = 1$ .

Ako se integral (28) podeli na jedan sa granicama  $-\infty$  do 0 i drugi

sa granicama 0 do  $(\ln D_p^* - \ln \bar{D}_{pg}) / \sqrt{2} \cdot \ln \sigma_g$ , tada je prvi integral jednak  $\sqrt{\pi}/2$  a drugi  $(\sqrt{\pi}/2) \cdot \operatorname{erf}((\ln D_p^* - \ln \bar{D}_{pg}) / \sqrt{2} \cdot \ln \sigma_g)$ .

Sada se za lognormalnu raspodelu dobija

$$N(D_p) = \frac{N_t}{2} + \frac{N_t}{2} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\ln(D_p/\bar{D}_{pg})}{\sqrt{2} \cdot \ln \sigma_g}\right) \quad (30)$$

Za  $D_p = \bar{D}_{pg}$  i kako je  $\operatorname{erf}(0) = 0$ , onda je

$$N(\bar{D}_{pg}) = \frac{N_t}{2} \quad (31)$$

Izraz (31) govori da je  $\bar{D}_{pg}$  medijana, tj. onaj prečnik za koji je

polovina čestica manjih dimenzija a polovina većih.

Kako bi se predstavio fizički smisao  $\sigma_g$ , razmotriće se prečnik  $D_{ps}$  za koji je  $\sigma_g = D_{ps}/\bar{D}_{pg}$ . Korišćenjem izraza (30) dobija se

$$N(D_{ps}) = N_t \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] = 0,841 \cdot N_t \quad (32)$$

To znači da je  $\sigma_g$  odnos prečnika ispod koga se nalazi 84,1% čestica i medijane i naziva se geometrijska standardna devijacija. Za monodisperzni aerosol  $\sigma_g = 1$ . Za bilo koju raspodelu, 68% svih čestica se nalazi u opsegu  $\bar{D}_{pg}/\sigma_g$  do  $\bar{D}_{pg} \cdot \sigma_g$  a 95% svih čestica u opsegu  $\bar{D}_{pg}/2 \cdot \sigma_g$  do  $2 \cdot \bar{D}_{pg}/\sigma_g$ .

Ako se želi izračunati srednji prečnik  $D_p$  aerosola za koji ima lognormalnu raspodelu koristiće se

$$\bar{D}_p = \frac{1}{N_t} \cdot \int_0^{\infty} D_p \cdot n_N(D_p) \cdot dD_p \quad (33)$$

Uzimajući u obzir izraz (25) može se napisati

$$\bar{D}_p = \frac{1}{\ln \sigma_g \cdot \sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(\ln D_p - \ln \bar{D}_{pg})^2}{2 \cdot \ln^2 \sigma_g}\right) \cdot dD_p \quad (34)$$

Posle rešavanja integrala (34) dobija se

$$\bar{D}_p = \bar{D}_{pg} \cdot \exp\left(\frac{\ln^2 \sigma_g}{2}\right) \quad (35)$$

Iz izraza (35) se može videti da srednji prečnik lognormalne raspodele zavisi kako od  $\bar{D}_{pg}$  tako i od  $\sigma_g$  i povećava se kako se povećava.

## Literatura

- [1] **William C. Hinds**: *Aerosol Technology (Properties, Behavior and Measurement of Airborne Particles)*, second edition, John Wiley & Sons, 1999.
- [2] **Kulkarni P, Baron P. A, Willeke K**: *Aerosol Measurement: Principles, Techniques and Applications*, third edition, John Wiley & Sons, 2011.
- [3] **\*\*\***: *Aerosol Statistics – Lognormal Distributions and dN/dlogDp*, application note PR-001, TSI incorporated, 2012.
- [4] **Čalić N**: *Teorijski osnovi pripreme mineralnih sirovina*, Univerzitet u Beogradu, Rudarsko geološki fakultet, 1990.
- [5] **Magdalinović N**: *Usitnjavanje i klasiranje*, Nauka Beograd, 1999.
- [6] **Bogner M**: *Mehaničke operacije*, Naučna knjiga Beograd, 1987.
- [7] **King R. P**: *Modeling and Simulation of Mineral Processing Systems*, second edition, Society for Mining, Metallurgy and Exploration, 2012.
- [8] **Fuerstenau M. C, Han K. N**: *Principles of Mineral Processing*, Society for Mining, Metallurgy and Exploration, 2003.
- [9] **Wills B. A, Napier-Munn T. J**: *Mineral Processing Technology*, seventh edition, Elsevier Science & Technology Books, 2006.
- [10] **Pruppacher H. R, Klett, J. D**: *Microphysics of Clouds and Precipitation*, 2nd edition, Kluwer Academic Publishers, ISBN 0-7923-4211-9, 1997.
- [11] **Seinfeld J, Pandis S**: *Atmospheric Chemistry and Physics: From Air Pollution to Climate Change*, Third Edition, John Wiley & Sons inc, 2016.

## Инжењерска комора Србије

Планери

Урбанисти



Пројектанти

Извођачи радова

Булевар војводе Мишића 37

Београд

011 655 7410

[www.ingkomora.rs](http://www.ingkomora.rs)

[info@ingkomora.rs](mailto:info@ingkomora.rs)